

7.3.15 Vzdálenost bodu od přímky II

Předpoklady: 070314

Pedagogická poznámka: Kvůli příští hodině je třeba připomenout žákům, aby se podívali na výpočet úhlu, který svírají dva vektory.

Pedagogická poznámka: Průběh hodiny hodně závisí na tom, jak odolní jsou studenti v dosazování do vzorců, které je nejtěžší částí hodiny. Dalším problémem pak mohou být rovnice s absolutní hodnotou.

Pedagogická poznámka: Následující příklad navazuje na poslední příklad minulé hodiny. Snažím se, aby si studenti ujasnili, co je stejné, co je jinak a podle toho se zařídili.

Pedagogická poznámka: Následující příklad počítáme pouze analytickým přístupem (druhá varianta), konstrukční přístup je uveden pouze pro demonstraci. Body na přímce najdeme dva, v každé lavici tak vznikne dvojice, která se snaží dojít k výsledku dvěma (trošku) různými způsoby.

Př. 1: Najdi přímku, která je rovnoběžná s přímkou $p: x - 3y + 2 = 0$ a je od ní vzdálena $\sqrt{10}$.

Dva způsoby řešení.

Konstrukční přístup: Hledaná přímka je rovnoběžná $\Rightarrow$ rovnice $x - 3y + c = 0 \Rightarrow$ potřebujeme najít bod, přes který přímka prochází $\Rightarrow$ hledáme bod vzdálený od přímky $x - 3y + 2 = 0$ o $\sqrt{10} \Rightarrow$ takových bodů je nekonečně mnoho $\Rightarrow$ musíme omezit výběr, například budeme hledat pouze body na ose y .

Analytický přístup: Hledaná přímka je rovnoběžná $\Rightarrow$ rovnice $x - 3y + c = 0$ hledáme podmínku, kterou přímka splňuje a která nám určí parametr c . Hledaná přímka je vzdálena od přímky $x - 3y + 2 = 0$ o $\sqrt{10} \Rightarrow$ je vzdálena od libovolného bodu přímky $x - 3y + 2 = 0$ o $\sqrt{10}$.

Hledáme bod na přímce $p: x - 3y + 2 = 0$: jednu souřadnici zvolíme, druhou dopočítáme.

Volíme souřadnici y (u x je číslo 1 $\Rightarrow$ při dopočítávání souřadnice se nemusí dělit), nekonečně mnoho možností.

- $y = 0 \Rightarrow x - 3 \cdot 0 + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow P_1[-2; 0],$
- $y = 1 \Rightarrow x - 3 \cdot 1 + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow P_2[1; 1].$

Hledaná přímka $x - 3y + c = 0$ je od nalezeného bodu vzdálena o $\sqrt{10}$.

Bod $P_1[-2; 0]$, přímka $x - 3y + c = 0$.

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot (-2) - 3 \cdot 0 + c|}{\sqrt{1 + (-3)^2}} = \sqrt{10}$$

$$\frac{|-2 + c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \quad \cdot / \sqrt{10}$$

$$|c - 2| = 10 \Rightarrow \text{hledáme čísla, jejichž obraz je}$$

Bod $P_2[1; 1]$, přímka $x - 3y + c = 0$.

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + c|}{\sqrt{1 + (-3)^2}} = \sqrt{10}$$

$$\frac{|-2 + c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \quad \cdot / \sqrt{10}$$

$$|c - 2| = 10 \Rightarrow \text{hledáme čísla, jejichž obraz je}$$

od obrazu čísla 2 vzdálený o 10 $\Rightarrow$
 $c_1 = 12, c_2 = -8.$

od obrazu čísla 2 vzdálený o 10 $\Rightarrow$
 $c_1 = 12, c_2 = -8.$

V rovině existují ve vzdálenosti $\sqrt{10}$ dvě přímky rovnoběžné s přímkou $p: x - 3y + 2 = 0$:
 $q_1: x - 3y + 12 = 0, q_2: x - 3y - 8 = 0.$

Ke stejnému výsledku bychom dospěli i konstrukčním přístupem.

Bod na ose y: $A[0; a_y]$. Dosadíme do vzorce pro vzdálenost:

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot 0 - 3 \cdot a_y + 2|}{\sqrt{1 + (-3)^2}} = \sqrt{10}.$$

$$\frac{|-3a_y + 2|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \quad \text{Použijeme } |-3a_y + 2| = |3a_y - 2|.$$

$$|3a_y - 2| = 10$$

Rovnice s absolutní hodnotou $\Rightarrow$ dělíme na intervaly: $3a_y - 2 = 0 \Rightarrow a_y = \frac{2}{3}.$

$$a_y \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \Rightarrow$$

$$3a_y - 2 \leq 0 \Rightarrow |3a_y - 2| = -3a_y + 2$$

$$-3a_y + 2 = 10$$

$$3a_y = -8$$

$$a_y = -\frac{8}{3}$$

$$a_y \in \left(\frac{2}{3}; \infty\right) \Rightarrow$$

$$3a_y - 2 \geq 0 \Rightarrow |3a_y - 2| = 3a_y - 2$$

$$3a_y - 2 = 10$$

$$3a_y = 12$$

$$a_y = 4$$

$\Rightarrow$ Dva body, které splňují podmínky.

$$A_1[0; 4]$$

Dosadíme do rovnice:

$$x - 3y + c = x - 3 \cdot 4 + c = 0 \Rightarrow c = 12.$$

$$x - 3y + 12 = 0$$

$$A_2\left[0; -\frac{8}{3}\right]$$

Dosadíme do rovnice:

$$x - 3y + c = x - 3 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) + c = 0 \Rightarrow c = -8.$$

$$x - 3y - 8 = 0$$

Pedagogická poznámka: U konstrukčního přístupu velká část žáků potřebuje diskusi o roli bodu A v řešení příkladu. Jde o to, aby si uvědomili, že bod A je pouze pomocným cílem k nalezení rovnic přímky a že si ho můžeme volit libovolně. Nic nám tedy nebrání si ho zvolit co nejjednodušeji.

Př. 2: Na přímce $x + 3y - 1 = 0$ najdi bod, který je od přímky $2x + y - 7 = 0$ vzdálen $2\sqrt{5}$.

Souřadnice bodu $A[a_x; a_y] \Rightarrow$ na určení dvou neznámých potřebujeme dvě rovnice.

- Bod A leží na přímce $x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow$ vyhovuje její rovnici $\Rightarrow a_x + 3 \cdot a_y - 1 = 0.$

- Bod A je od přímky $2x + y - 7 = 0$ vzdálen $2\sqrt{5}$:

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot a_x + a_y - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2\sqrt{5}.$$

Z první rovnice $a_x + 3 \cdot a_y - 1 = 0$ dosadíme do druhé $a_x = 1 - 3a_y$.

$$\frac{|2 \cdot (1 - 3a_y) + a_y - 7|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \quad / \cdot \sqrt{5}$$

$$|2 - 6a_y + a_y - 7| = 10$$

$$|-5a_y - 5| = 10$$

$$|-5||a_y + 1| = 10$$

$$|a_y - (-1)| = 2 \Rightarrow \text{hledáme čísla vzdálená od } -1 \text{ o dva.}$$

- $a_{y1} = 1 \Rightarrow a_x = 1 - 3a_y = 1 - 3 \cdot 1 = -2 \Rightarrow A_1[-2; 1]$
- $a_{y2} = -3 \Rightarrow a_x = 1 - 3a_y = 1 - 3 \cdot (-3) = 10 \Rightarrow A_2[10; -3]$

Řešením příkladu je dvojice bodů $A_1[-2; 1]$ a $A_2[10; -3]$.

Pedagogická poznámka: Nejdůležitějším místem příkladu je sestavení rovnic. Napíšeme podmínky na tabuli slovně, ale sestavení rovnic musí nejdříve provést samostatně žáci.

Orientaci v příkladu může zlepšit pojmenování přímek. Žákům to nezakazuji, ale ani to za ně nedělám.

Př. 3: Sestav soustavu rovnic v předchozím příkladu, pokud si jako hledaný bod zvolíme bod $B[x; y]$.

Souřadnice bodu $B[x; y] \Rightarrow$ na určení dvou neznámých potřebujeme dvě rovnice.

- Bod B leží na přímce $x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow$ vyhovuje její rovnici $x + 3y - 1 = 0$.
- Bod B je od přímky $2x + y - 7 = 0$ vzdálen $2\sqrt{5}$:

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot x + y - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2\sqrt{5}.$$

Použití bodu $B[x; y]$ je rychlejší, ale vyžaduje lepší orientaci v dosazování do rovnic.

Pedagogická poznámka: Pro některé studenty je předchozí dosazení opravdu oříšek, zejména fakt v první podmínce, kdy po dosazení zůstane rovnice beze změny.

Př. 4: Jsou dány dvě rovnoběžné přímky $x - 2y + 6 = 0$ a $2x - 4y - 5 = 0$. Najdi přímku, která je s nimi rovnoběžná a má od obou stejnou vzdálenost.

Příklad je možné řešit dvěma způsoby: analyticky a napodobením konstrukce.

Analytické řešení:

Hledaná přímka je rovnoběžná s přímkou $2x - 4y - 5 = 0 \Rightarrow$ je popsána rovnicí $2x - 4y + c = 0$. Koeficient c určíme pomocí libovolného bodu na této přímce. Zvolíme si například bod s nulovou x -ovou souřadnicí: $2 \cdot 0 - 4y + c = 0 \Rightarrow y = \frac{c}{4}$.

Bod $\left[0; \frac{c}{4}\right]$ je stejně vzdálen od přímek $x - 2y + 6 = 0$ a $2x - 4y - 5 = 0$.

$$\frac{\left|0 - 2 \cdot \frac{c}{4} + 6\right|}{\sqrt{1 + (-2)^2}} = \frac{\left|2 \cdot 0 - 4 \cdot \frac{c}{4} - 5\right|}{\sqrt{2 + (-4)^2}} \Rightarrow \frac{\left|-\frac{c}{2} + 6\right|}{\sqrt{5}} = \frac{|-c - 5|}{\sqrt{20}} \quad | \cdot 2\sqrt{5}$$

$$2 \left| -1 \left| \frac{c}{2} - 6 \right| \right| = |-1| |c + 5|$$

$|c - 12| = |c + 5| \Rightarrow$ řešíme po intervalech:

- $c \in (-\infty; -5) \Rightarrow -c + 12 = -c - 5 \Rightarrow 17 = 0 \Rightarrow K = \emptyset$
- $c \in \langle -5; 12 \rangle \Rightarrow -c + 12 = c + 5 \Rightarrow 2c = 7 \Rightarrow c = \frac{7}{2}$
- $c \in \langle 12; \infty \rangle \Rightarrow c - 12 = c + 5 \Rightarrow -17 = 0 \Rightarrow K = \emptyset$

Hledanou přímkou je přímka $2x - 4y + \frac{7}{2} = 0$.

Konstrukční řešení:

Rovnoběžku, která je osou pásu, můžeme vést středem libovolné úsečky, která má krajní body na přímkách $x - 2y + 6 = 0$ a $2x - 4y - 5 = 0$.

- Průsečík přímky $x - 2y + 6 = 0$ s osou y : $0 - 2y + 6 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow$ bod $A[0; 3]$.
- Průsečík přímky $2x - 4y - 5 = 0$ s osou y : $2 \cdot 0 - 4y - 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{4} \Rightarrow$ bod

$$B\left[0; -\frac{5}{4}\right].$$

$$3 + \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{12 - 5}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow \text{střed úsečky } AB: S_{AB}\left[0; \frac{7}{8}\right].$$

Rovnice rovnoběžky: $2x - 4y + c = 0$, dosadíme bod $S_{AB}\left[0; \frac{7}{8}\right]$: $2 \cdot 0 - 4 \cdot \frac{7}{8} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{7}{2}$

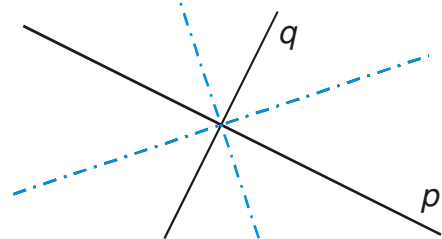
Osou pásu je přímka $2x - 4y + \frac{7}{2} = 0$.

Pedagogická poznámka: Studenti mají tendenci udělat průměr z koeficientů c v obou rovnicích, což je možné pouze v případě, že jsou obě rovnice postavené na stejném normálovém vektoru. V takovém případě jde samozřejmě o řešení nejrychlejší:

$$2x - 4y + 12 = 0, \quad 2x - 4y - 5 = 0 \Rightarrow c = \frac{12 + (-5)}{2} = \frac{7}{2}.$$

Př. 5: Najdi všechny body roviny, které mají stejnou vzdálenost od přímek $p: x + 2y - 3 = 0$ a $q: 2x - y - 1 = 0$.

Z obrázku je zřejmé, že hledané body tvoří dvě přímky – osy obou úhlů, které přímky svírají.



Zkusíme najít tyto přímky pomocí podmínky ze zadání.

Hledáme body $X[x; y]$.

- Vzdálenost bodu $X[x; y]$ od přímky $p: x + 2y - 3 = 0$: $\frac{|x + 2y - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$.
- Vzdálenost bodu $X[x; y]$ od přímky $q: 2x - y - 1 = 0$: $\frac{|2x - y - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$.

Obě vzdálenosti se rovnají: $\frac{|x + 2y - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x - y - 1|}{\sqrt{5}} \quad / \cdot \sqrt{5}$.

$|x + 2y - 3| = |2x - y - 1| \Rightarrow$ musíme odstranit absolutní hodnoty. Dvě možnosti:

- umocnění: $(x + 2y - 3)^2 = (2x - y - 1)^2$ - získáme strašné výrazy na obou stranách, ověřování si ušetříme, obě strany byly před umocněním kladné,
- odstranění absolutní hodnoty: výhodnější, nepřibudou nám druhé mocniny.

Jak zjistíme, kdy odstranit absolutní hodnoty, výrazy uvnitř jsou složité. Jsou jen čtyři možnosti, které rovnou vyzkoušíme:

- oba výrazy záporné: $|x + 2y - 3| = |2x - y - 1| \Rightarrow -(x + 2y - 3) = -(2x - y - 1)$
 $-x - 2y + 3 = -2x + y + 1$
 $x - 3y + 2 = 0$
- oba výrazy kladné: $|x + 2y - 3| = |2x - y - 1| \Rightarrow x + 2y - 3 = 2x - y - 1$
 $x - 3y + 2 = 0$ (stejná přímka jako v předchozím případě)
- levý výraz kladný, pravý záporný: $|x + 2y - 3| = |2x - y - 1| \Rightarrow$
 $x + 2y - 3 = -(2x - y - 1)$
 $x + 2y - 3 = -2x + y + 1$
 $3x + y - 4 = 0$
- levý výraz záporný, pravý kladný: $|x + 2y - 3| = |2x - y - 1| \Rightarrow$
 $-(x + 2y - 3) = 2x - y - 1$
 $-x - 2y + 3 = 2x - y - 1$
 $3x + y - 4 = 0$ (stejná přímka jako v předchozím případě)

Množinu všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od přímek $p: x + 2y - 3 = 0$ a $q: 2x - y - 1 = 0$ tvoří dvojice přímek $x - 3y + 2 = 0$ a $3x + y - 4 = 0$.

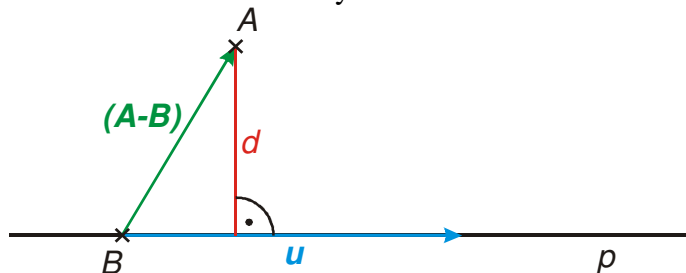
Př. 6: Pro vzdálenost bodu A od přímky $p(B; \mathbf{u})$ se používá také vzorec

$$d = |Ap| = \frac{|(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}. \text{ Dokaž jeho správnost.}$$

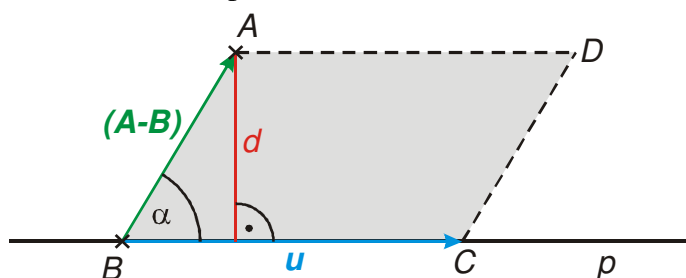
Upravíme si vzorec: $d = |Ap| = \frac{|(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|} \quad / \cdot |\mathbf{u}|$

$$d \cdot |\mathbf{u}| = |(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \times \mathbf{u}|$$

Nakreslíme si schématický obrázek situace.



Pravou stranu rovnice tvoří velikost vektorového součinu $|(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \times \mathbf{u}|$. Z vlastností vektorového součinu víme, že platí: $|(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \times \mathbf{u}| = |(\mathbf{A} - \mathbf{B})| \cdot |\mathbf{u}| \cdot \sin \alpha$ (velikost vektorového součinu se rovná ploše rovnoběžníku určeného vektory $(\mathbf{A} - \mathbf{B})$ a $\mathbf{u}$).



Obsah tohoto obdélníku můžeme spočítat také pomocí vzorce $S = a \cdot v_a = |\mathbf{u}| \cdot d$.

Platí tedy: $d \cdot |\mathbf{u}| = |(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \times \mathbf{u}|$ a také $d = |Ap| = \frac{|(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}$.

Př. 7: Petáková:

strana 109/cvičení 65

strana 109/cvičení 66

strana 109/cvičení 68

strana 109/cvičení 74

Shrnutí: